UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
Thème 3
Fonctions de plusieurs variables
Licence 2ème année

Exercice 1 :

a)Rappeler le théorème de Rolle et vérifier le sur la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b)Rappeler le théorème des acroissements finis et le vérifier sur la fonction $f(x) = x^2 - x$ sur l'intervalle fermé $[1, 2]$.

Exercice 2 :

Rappeler les dérivées des fonctions usuelles.

Exercice 3 :

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = Ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

b) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 4 :

Calculer les dérivées partielles secondes des expressions suivantes :

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ b) $f(x, y) = x^y$ c) $f(x, y) = xe^{y^2}$.

Exercice 5 :

Montrez que la fonction $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ est homogéne puis vérifiez le théorème d'Euler.

Exercice 6 :

Soit la fonction $f(x, y) = \left(ax^2y; \ln(xy); \frac{b}{x^2+y^2}\right)$ déterminez la matrice jacobienne de cette fonction.

Exercice 7 :

Ecrire le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de zéro des fonction suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{1+2x} - (1+x)$

b) $g(x) = e^{3x} - 3e^x + 2$

En déduire la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ quand x tend vers zéro.

Exercice 8 :

Ecrire le développement limité à l'ordre n au voisinage de zéro des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(1+x)$

b) $g(y) = \cos y$.

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(1+y)$

On note $\widehat{f_0}$ l'approximation affine de $f(X)$ en $(0,0)$ et on note $\widehat{\widehat{f}}_0$ son approximation quadratique en $(0,0)$.

a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ de f.

b) En déduire $\widehat{f_0}$ ainsi que $\widehat{\widehat{f}}_0$

c) Calculer les valeurs approchées respectives de f en $X = (0.1, 0.2)$ et comparez les avec la valeur exacte donnée par la calculatrice.

Exercice 10 :

On considère la fonction à valeurs réelles suivante : $f(x,y) = \sqrt{1 - xe^y} - 1$

1) Déterminez puis représentez graphiquement le domaine de définition de f.

2) Rappellez la formule d'un DL à l'ordre 2 de $f(x,y)$ en un point (a,b).

3) Déterminez un développement limité de f en $(0,1)$.

Exercice 11 :

Trouvez tous les polynômes $P(x,y)$ homogènes de degré n vérifiant :

$$\frac{1}{x}P'_x(x,y) = \frac{1}{y}P'_y(x,y)$$