Thème 3 : Corrections.

- Ex 1 Rolle

(a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que f est continue sur $[a,b]$, f est dérivable sur $]a,b[$, $f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$ il existe $c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$.

(b) Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que f est continue sur $[a,b]$, f est dérivable sur $]a,b[$, $\Rightarrow$ il existe $c \in]a,b[$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

- Ex 2.

Dérivées de quelques fonctions "usuelles" (à connaître par coeur).

$(x^n)' = n x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{R})$.

en particulier $n = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, etc.

$n = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ si $u = f(x)$

$(e^x)' = e^x$ $\quad (e^u)' = u' e^u$ si $u \in f(a)$.

$(u^n)' = n u' \cdot u^{n-1}$.

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \times u' = \frac{1}{2} u' \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}$.

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$\left(u(v(x))\right)' = u'\left(v(x)\right) \times v'(x)$.

- Ex 3.

(a) $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \times -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + xy} = -\frac{y}{x(x+y)}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x+y}$.

gradient de f = grad f = $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{x+y} \begin{pmatrix} -\frac{y}{x} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b). $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} \times 1 - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \end{pmatrix}.$$

Ex 4

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\times(x+y) - 1\times(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1\times(x+y) - (x-y)\times 1}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{0\times(x+y)^2 - 2y\times\left(2(x+y)\right)}{\left((x+y)^2\right)^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{-4(x+y)^3 - (-4y)\times 3(x+y)^2}{(x+y)^6} = \frac{2x(x+y)^2 - 2y\times 2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{2x-2y}{(x+y)^3}.$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d}{dx}\left(2y(x+y)^{-2}\right) = -\frac{4y}{(x+y)^3}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ d'après le théorème de Schwarz qu'on peut utiliser car la fonction est C^2 (fonction polynômiale en x et y).

(b) $f(x,y) = x^y = e^{\ln(x^y)} = e^{y\ln x}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y\ln x} \times \frac{y}{x} = y x^{y-1}$. $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y\ln x} \times \ln x = x^y \ln x$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y\ln x} \times \frac{y}{x} \times \frac{y}{x}$ $\xrightarrow{(u\times v)}$ On dérive une deuxième fois avec les produits.

$\frac{-y}{x^2} e^{y\ln x}$.

$= \frac{y^2 - y}{x^2} x^y = (y^2-y) x^{y-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\ln x)^2 e^{y\ln x} = (\ln x)^2 x^y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{x} e^{y\ln x} + \frac{y}{x} \ln x \cdot e^{y\ln x} = \frac{1 + y\ln x}{x} \cdot x^y = (1+y\ln x) x^{y-1}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (Théorème de Schwarz car la fonction est C^2, par composition de fonctions C^2.).

• Ex 5.

f est homogène de degré k ssi $f(\lambda \vec{u}) = \lambda^k \cdot f(\vec{u})$.

Calcul de $f(\lambda x, \lambda y)$:

$f(\lambda x, \lambda y) = \ln\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = f(x,y) = \lambda^0 f(x,y)$.

f est donc homogène de degré 0.

Théorème d'Euler : Si f est homogène de degré k, $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f(\vec{u})$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x/y} \times 1/y = 1/x$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x} \frac{1}{x/y} \times -\frac{x}{y^2} = -1/y$.

$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x \times 1/x + y \times -1/y = 0$

$= 0 \times f(x,y)$, ce qui vérifie le théorème d'Euler car le degré d'homogénéité de f, $k = 0$.

• Ex 6.

Soit $F : (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

La matrice jacobienne J_F est la matrice des dérivées premières. La $i^{ème}$ ligne de J_F est la transposée du vecteur gradient de $f_i(x_1, \dots, x_n)$.

$f(x,y) = (ax^2y,\ \ln(xy),\ \frac{b}{x^2+y^2})$.

Dans le cas ici $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$(x,y) \longrightarrow (ax^2y,\ \ln(xy),\ \frac{b}{x^2+y^2})$.

$f_1(x,y) = ax^2y \qquad f_2(x,y) = \ln xy. \qquad f_3(x,y) = \frac{b}{x^2+y^2} = b(x^2+y^2)^{-1}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2axy. \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{xy} \times y = \frac{1}{x}. \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x} = -b(x^2+y^2)^{-2} \times 2x = -\frac{2bx}{(x^2+y^2)^2}.$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = ax^2. \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy} \times x = \frac{1}{y}. \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = -\frac{2by}{(x^2+y^2)^2}.$

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2axy & ax^2 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ \frac{-2bx}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2by}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

○ Ex 7.

On va rappeler la formule d'un DL à l'ordre 2 en a pour une fonction à 1 variable :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \tfrac{1}{2}\cdot f''(a)\cdot(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

(a) $f(x) = \sqrt{1+2x} - (1+x)$.

On détermine le domaine de définition D_f de f :

Pour que la racine carrée soit définie, il faut que $1+2x \geq 0$

$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

$D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Nous pouvons définir un DL en 0 car $0 \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Par ailleurs, f est continue sur D_f et dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - 1$$

f' est aussi continue sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$f''(x) = -\tfrac{1}{2} \times 2 \times (1+2x)^{-3/2} = -\frac{1}{(1+2x)^{3/2}}.$$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = -1.$

$$\Rightarrow \quad f(x)\big|_{\text{DL en } x=0} = -\tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

(b) $g(x) = e^{3x} - 3e^x + 2$.

Le domaine de définition de g $D_g = \mathbb{R}$ (somme d'exponentielles).

g est continue sur $\mathbb{R}$ et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3e^{3x} - 3e^x$ $\quad g(0) = 0 \quad g'(0) = 0 \quad g''(0) = 9 - 3 = 6$

$g''(x) = 9e^{3x} - 3e^x$

$g(x)\big|_{\substack{\text{DL en} \\ x=0}} = 3x^2 + o(x^2)$.

(c) Pour f et g, on peut écrire les DL à l'ordre 2 avec le reste comme le produit de x^2 et d'une fonction dont la limite en 0 vaut 0.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_1$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1 = 0$

$g(x) = 3x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_2$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2 = 0$

On en déduit ainsi la limite demandée comme suit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + x^2\cdot\varepsilon_1}{3x^2 + x^2\cdot\varepsilon_2} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1}{3 + \varepsilon_2}.$$

→ n'est plus une forme indéterminée en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1}{3 + \varepsilon_2} = -\frac{1}{6}.$$

($\varepsilon_1 \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}$, $3 + \varepsilon_2 \xrightarrow{x\to 0} 3$)

• Ex 8

Pour rappel, le développement limité d'une fonction d'une variable à l'ordre n en a s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

$k! = \prod_{i=1}^{k} i$ = produit des k premiers entiers = factorielle k.

avec $0! = 1$.

(a) $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$.

On peut en déduire une formule générale : $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot (1+x)^{-k}$

On démontre la récurrence pour $f^{(k)}(x)$ en supposant que la formule est vraie à l'ordre k.

Calcul de $f^{(k+1)}(x) := \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} (k+1)! \; -k \, (1+x)^{-k-1}$.

$= (-1)(-1)^{k+1} \underbrace{k\,(k+1)!}_{k!} (1+x)^{-(k+1)}$

$= (-1)^{k+2} \; k! \; (1+x)^{-(k+1)}$.

→ la récurrence est vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$

Nous remplaçons ensuite $f^{(k)}$ dans la formule générale du DL en 0 :

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! \; x^k + o(x^n)$.

$\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{(k-1)!}{k\,(k-1)!} = \frac{1}{k}$.

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$.

(b) $g(y) = \cos y$. $g'(y) = -\sin y$. $g''(y) = -\cos y$.

$g(0) = 1$. $g'''(y) = \sin y$ $g^{(4)}(y) = \cos y$.

On peut déduire que $g^{(4)}_{\,k}(y) = g(y)$ $g^{(4k+1)} = g'(y)$

$g^{(4k+2)} = g''(y)$

$g^{(4k+3)} = g^{(3)}(y)$.

Pour calculer le DL, on va se placer au pt 0. $\Rightarrow \cos 0 = 1$

$\sin 0 = 1$.

De ce fait, toutes dérivées impaires sont nulles, et les dérivées paires alternent entre -1 et $+1$.

$$g(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \ldots + o(y^n).$$

• Ex 9

Rappel de la formule générale d'un DL à l'ordre 2 pour une fonction de 2 variables de classe C^2 en (a,b) :

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b).(x-a) + (y-b) f'_y(a,b).$$
$$+ \frac{1}{2} f''_{x^2}(a,b).(x-a)^2 + \frac{1}{2} f''_{y^2}(a,b)(y-b)^2$$
$$+ f''_{xy}(a,b).(x-a).(y-b) + o\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right).$$

(a) $f(x,y) = \ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(1+y)$.

Détermination de D_f :

Pour que les logarithmes soient définis, il faut que

$1+x > 0$ et $1+y > 0$.

$x > -1$ $y > -1$ $\Rightarrow D_f = \{(x,y) \mid x > -1 \text{ et } y > -1\}$.

Calcul des dérivées partielles :

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) = \frac{1}{1+x}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2+2y} = f'_y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(1+x)^2} = f''_{x^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+y)^2} = f''_{y^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = f''_{xy}$.

$f(x,y)$ est de classe C^2 sur D_f, on peut appliquer le théorème de Schwarz. $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

$f(0,0) = 0$ $\quad f'_x(0,0) = 1$ $\quad f'_y(0,0) = 0$ $\quad f''_{x^2}(0,0) = -1$ $\quad f''_{y^2}(0,0) = -\frac{1}{2}$.

$f''_{xy}(0,0) = 0$.

Donc, $f(x,y) = x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + o(x^2+y^2)$.

(b) L'approximation affine correspond à tronquer le DL à sa partie affine.

$\hat{f}_0(x,y) = x + y/2$.

De la même manière, l'approximation quadratique correspond à un DL à l'ordre 2 tronqué.

$\hat{\hat{f}}_0(x,y) = x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}x^2 - 1/4\,y^2$.

(c) Le point $(0,1, 0.2)$ est proche (dans le voisinage) de $(0,0)$. On peut utiliser l'approximation de f en $(0,0)$ pour calculer une valeur approchée de f en ce point.

$\hat{f}_0(0.1, 0.2) = 0.1 + \frac{0.2}{2} = 0.2$.

$\hat{\hat{f}}_0(0.1, 0.2) = 0.1 + \frac{0.2}{2} - \frac{1}{2}(0.1)^2 - 1/4(0.2)^2$

$= 0.2 - 0.005 - 0.1 = 0.185$.

La valeur de la calculatrice est 0.186. L'approximation quadratique est plus précise que l'approximation linéaire. En tronquant, le DL à un ordre plus élevé, on améliore l'approximation.

Ex 10

$f(x,y) = \sqrt{1 - xe^y} - 1$. Nous calculons le domaine de définition de f. Ici, on a une racine carrée $\Rightarrow 1 - xe^y \geq 0$.

$-xe^y \geq -1$

$xe^y \leq 1$.

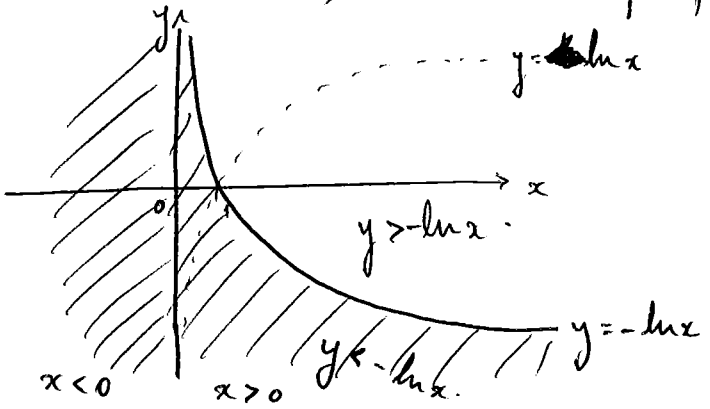
$xe^y \leq 1$. $e^y > 0$ car l'exponentielle est une fonction dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Si ~~$x > 0$, $xe^y \geq 0$ $\Rightarrow$ pas possible~~.

$x \leq 0$, $xe^y \leq 1$ quel que soit la valeur de y.

$\Rightarrow$ La condition est vérifiée.

Si $x \geq 0$, c'est beaucoup plus simple de visualiser sur une courbe



$xe^y \leq 1$

$\Rightarrow \ln x + y \leq 0$

$y \leq -\ln x$.

On trace $y = -\ln x$ (réflexion de la courbe $y = \ln x$ autour de l'axe x), le domaine recherché est en dessous de la courbe.

$$\Rightarrow D_f = \{(x,y) \mid xe^y \leq 1\}.$$

(b) DL d'une fonction de 2 variables autour du pt (a,b):

$$f(x,y)\Big|_{\substack{\text{DL en } (a,b) \\ \text{à l'ordre 2}}} = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \tfrac{1}{2} f''_{x^2}(a,b)(x-a)^2 + \tfrac{1}{2} f''_{y^2}(a,b)(y-b)^2 + f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + o\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right).$$

(c) DL de f en $(0,1)$:

Calculons les dérivées jusqu'à celles à l'ordre 2:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}(1-xe^y)^{-1/2} \times -e^y = -\frac{e^y}{2\sqrt{1-xe^y}}.$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2}(1-xe^y) \times -xe^y = -\frac{xe^y}{2\sqrt{1-xe^y}}.$$

$$f''_{x^2}(x,y) = -\frac{e^y}{2} \times -\frac{1}{2}(1-xe^y)^{-3/2} \times -e^y = -\frac{e^{2y}}{4}(1-xe^y)^{-3/2}.$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{-xe^y}{2\sqrt{1-xe^y}} - \left(xe^y \times \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}(1-xe^y)^{-3/2} \times -xe^y\right) = \frac{-xe^y}{2\sqrt{1-xe^y}} - \frac{x^2e^{2y}}{4}(1-xe^y)^{-3/2}$$

$$f''_{yx} = \frac{-e^y}{2\sqrt{1-xe^y}} - \left(-e^y \times \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}(1-xe^y)^{-3/2} \times -xe^y\right) = \frac{-e^y}{2\sqrt{1-xe^y}} - \frac{xe^{2y}}{4}(1-xe^y)^{-3/2}$$

$f''_{xy} = f''_{yx}$ car le théorème de Schwarz s'applique sur $D_f \setminus \{xe^y = 1\} = \{(x,y) \mid xe^y < 1\}$.

$f(0,1) = 0$ $\quad f'_x(0,1) = -e/2$ $\quad f'_y(0,1) = 0$ $\quad f''_{x^2}(0,1) = -e^2/4$ $\quad f''_{y^2}(0,1) = 0$ $\quad f''_{xy}(0,1) = -e/2$.

$$f(x,y)\Big|_{\text{DL en } (0,1)} = -\frac{e}{2}x - \frac{e^2}{8}x^2 - \frac{e}{2}x(y-1) + o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$